



für Klassen 7-8

13 Aufgaben mit Lösungen



Luisa Handel und Juliette Scheuing

Dr. Olga Lomonosova und Dr. Albert Oganian

haben die Aufgaben und die Lösungen vorbereitet.

Sarah Alber

hat die Aufgaben illustriert.

Schuljahr 2017 / 2018



1. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Schafe

Bei der Geburt Christi waren einige Hirten mit ihren Schafen dabei. Die Hälfte der Schafe war weiß, ein Viertel war braun, ein Siebtel war schwarz und die restlichen drei Schafe waren grau. Wie viele Schafe waren bei der Geburt Christi dabei?



Lösung:

Aus den Angaben lässt sich folgende Gleichung zusammenstellen: $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3$, wobei x die Anzahl der Schafe ist. Der kleinste gemeinsame Nenner ist in diesem Fall 28, somit kann man wie folgt rechnen:

$$x = \frac{14x + 7x + 4x + 84}{28}$$

Daraus folgt, dass $28x = 25x + 84$; $3x = 84$; $x = 28$

Antwort: die Anzahl aller Schafe ist also 28, davon 14 weiße, 7 braune, 4 schwarze und 3 graue.

2. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Sternsinger

Bei einer Gesangsübung der Sternsinger kommen einem Engel folgende Gleichungen in den Sinn:

DO+SI=MI

RE+MI=FA

LA+SI=SOL

Der Engel bemerkt, dass jeder Buchstabe durch eine Ziffer von 0 bis 9 ausgetauscht werden kann, sodass alle Gleichungen stimmen. Jede Ziffer kommt nur einmal vor und jeder Buchstabe entspricht genau einer Ziffer. Welcher Buchstabe entspricht welcher Ziffer?



Lösung:

Die Buchstaben entsprechen folgenden Ziffern:

S	R	A	D	M	I	E	F	L	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Antwort: Die Gleichungen sehen so aus:

40+16=56

27+56=83

93+16=109



3. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Punsch auf einer Weihnachtsparty

Für eine Weihnachtsparty werden am LGH 6 Liter Punsch gebraucht. Jedoch gibt es nur ein 4 Liter und ein 9 Litergefäß. Ist es trotzdem möglich genau 6 Liter Punsch zu erhalten? Wenn ja, wie?

Hinweis: es gibt beliebig viel Punsch und es darf auch etwas in ein sehr großes Gefäß wegschütten werden.



Lösung 1:

Sechs Liter Punsch mit einem 4-Liter- und einem 9-Liter-Gefäß abmessen, so geht's:

1. Schritt: das 9-Liter-Gefäß wird vollgefüllt.
2. Schritt: 4 Liter werden aus diesem Gefäß in das 4-Liter-Gefäß umgefüllt. 5 Liter bleiben im 9-Liter-Gefäß übrig.
3. Schritt: der Punsch aus dem 4-Liter-Gefäß wird ausgeschüttet.
4. Schritt: Jetzt werden erneut 4 Liter aus dem 9-Liter-Gefäß ins 4-Liter-Gefäß geschüttet. Im 9-Liter-Gefäß bleibt 1 Liter Punsch übrig.
5. Schritt: Der Punsch aus dem 4-Liter-Gefäß wird ausgeschüttet.
6. Schritt: Jetzt wird der im 9-Liter-Gefäß verbleibenden Liter in das 4-Liter-Gefäß geschüttet. Das 9-Liter Gefäß ist jetzt leer. Im 4-Liter-Gefäß ist noch 1 Liter.
7. Schritt: Man füllt das 9-Liter-Gefäß wieder voll auf.
8. Schritt: Jetzt wird das 4-Liter-Gefäß mit Punsch aus dem 9-Liter-Gefäß vollgeschüttet. Da sich im 4-Liter-Gefäß schon ein Liter befindet, passen nur noch 3 Liter Punsch rein. Somit bleiben im 9-Liter-Gefäß 6 Liter übrig.

Lösung 2 (eine Schülerlösung):

1. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten.
2. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten.
3. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten. 9l – Gefäß ist voll und im 4l – Gefäß sind 3l Punsch.
4. Schritt: 9l - Gefäß leeren.
5. Schritt: 3l aus 4l – Gefäß in 9l – Gefäß schütten.
6. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten.
7. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten. 9l – Gefäß ist voll und im 4l – Gefäß sind 2l Punsch.
8. Schritt: 9l - Gefäß leeren.
9. Schritt: 2l aus 4l – Gefäß in 9l – Gefäß schütten.
10. Schritt: 4l – Gefäß voll und in 9l - Gefäß schütten. Im 9l – Gefäß sind 6l Punsch.

4. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Klassenweihnachtsfeier

Annabel hat 100 Euro bekommen und soll davon Plätzchen für die ganze Klasse kaufen. Sie soll insgesamt 100 Packungen Lebkuchen, Spitzbuben und Vanillekipferl kaufen. Sie soll das ganze Geld ausgeben und von jeder Plätzchenart mindestens eine Packung kaufen.



Eine Packung Lebkuchen kostet 10 Euro, eine Packung Vanillekipferl kostet 3 Euro und eine Packung Spitzbuben 50 Cent. Mit wie vielen Packungen Lebkuchen, Vanillekipferl und Spitzbuben jeweils kommt Annabel aus dem Plätzchenladen wieder zurück?



Lösung:

Es ist klar, dass Annabel eine gerade Anzahl der Packungen von Spitzbuben kaufen soll. Wenn von jeder Sorte Plätzchen mindestens eine Packung gekauft werden soll, dann muss mindestens 14 € für zwei Packungen Spitzbuben und je eine Packung von Lebkuchen und Vanillekipferl ausgegeben werden.

Für die restlichen 86 € können beliebig viele Packungen jeder Sorte gekauft werden. z. B. 172 Packungen von Spitzbuben. In diesem Fall kaufte Annabel 174 Packungen von Spitzbuben und je eine Packung von Lebkuchen und Vanillekipferl.

Oder

Um die 100 Euro vollständig auszugeben, kann Annabel, z. B., 5 Packungen Lebkuchen einkaufen (50 Euro), eine Packung Vanillekipferl kaufen (3 Euro) und 94 Packungen Spitzbuben kaufen (47 Euro).

Antwort: es gibt mehrere Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen 100 € auszugeben.

Zusatzaufgabe: Nenne zwei weitere Einkaufsmöglichkeiten für Annabel.

5. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Mathematische Erziehung 1

Der kleine Matti war nicht immer brav. Daher hat dieses Jahr der Weihnachtsmann ihm ein Rätsel gestellt. Er hat ihm drei Kisten gegeben. In einer der drei ist sein Geschenk.



Auf der ersten Kiste steht:
„Hier ist das Geschenk drin“

Auf der zweiten Kiste steht:
„Hier ist das Geschenk nicht“

Auf der dritten Kiste steht:
„Das Geschenk ist nicht in
der ersten Kiste“

Entweder eine Aussage auf den Kisten ist wahr oder keine. Welche Kiste muss Matti öffnen um sein Geschenk zu bekommen?

Lösung:

Wenn das Geschenk sich in der 1. Kiste befindet, dann sind die Aussagen auf der 1. Kiste und auf der 2. Kiste wahr und auf der 3. Kiste Kisten falsch, was nicht geht.

Wenn das Geschenk sich in der 2. Kiste befindet, dann sind die Aussagen auf den 1. Und 2. Kisten falsch und auf der 3. Kiste wahr, was geht.

Wenn das Geschenk sich in der 3. Kiste befindet, dann sind die Aussagen auf der 2. und auf der 3. Kiste wahr, was nicht geht.

Antwort: das Geschenk befindet sich in der 2. Kiste



Mathematische Erziehung 2

Beweise, dass die Aufgabe nicht lösbar ist, wenn auf den Kisten Folgendes steht.



Auf der ersten Kiste steht:
„Hier ist das Geschenk drin“



Auf der zweiten Kiste steht:
„Hier ist das Geschenk“



Auf der dritten Kiste steht:
„Das Geschenk ist nicht in
der ersten Kiste“

Lösung:

Die Aussagen 1 und 2 können nicht gleichzeitig wahr sein.

- (1) Wenn die Aussage 1 wahr ist, dann sind die Aussagen 2 und 3 falsch und das Geschenk befindet sich in der 1. Kiste.
- (2) Wenn die Aussage 2 wahr ist, dann ist die Aussage 1 falsch und die Aussage 3 wahr, was nicht geht. Das Geschenk kann sich nicht in der 2. Kiste befinden.
- (3) Wenn die Aussage 3 wahr ist, dann ist auch die die Aussage 1 wahr, was nicht geht.
- (4) Wenn alle drei Aussagen falsch sind, dann befindet sich das Geschenk in der 3. Kiste.

Antwort: der kleine Matti kann nicht entscheiden, welche Kiste er aufmacht.

6. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Wettbewerb „Ein Geschenk verpacken“

Ein Wichtel benötigt zum Verpacken eines Geschenks 15 Minuten weniger, als sein Freund. Wenn beide zusammenarbeiten, brauchen sie 5 Minuten weniger, als wenn der erste Wichtel allein arbeiten würde.

Wie lange braucht der erste Wichtel, um alleine das Geschenk zu verpacken?

Wie lange braucht sein Freund, um alleine das Geschenk zu verpacken?

Wie lange brauchen sie, um gemeinsam das Geschenk zu verpacken?



Lösung:

Die Zeit in Minuten, die der Wichtel zum Verpacken des Geschenkes braucht, sei t . Dann braucht sein Freund $t + 15$ Minuten und die beiden zusammen $t - 5$ Minuten.

Die gemeinsame Zeit kann auch so berechnet werden.

Der Wichtel verpackt $\frac{1}{t}$ des Geschenkes pro Minute. Das ist seine Geschwindigkeit des Verpackens. Die Geschwindigkeit seines Freundes ist

$$\frac{1}{t+15}$$

Zusammen verpacken sie das Geschenk mit der Geschwindigkeit



$$\frac{1}{t+15} + \frac{1}{t}$$

Die Zeit, die die beiden zum Verpacken benötigen, ist

$$\frac{1}{\frac{1}{t+15} + \frac{1}{t}}$$

Minuten oder $t - 5$ Minuten. Um t zu bestimmen, soll die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\frac{1}{\frac{1}{t+15} + \frac{1}{t}} = t - 5 \Rightarrow \frac{1}{t+15} + \frac{1}{t} = \frac{1}{t-5} \Rightarrow t(t-5) + (t-5)(t+15) = t(t+15)$$

Daraus folgt die quadratische Gleichung $t^2 - 10t - 75 = 0$, die zwei Lösungen

$$t_1 = 15 \text{ und } t_2 = -5$$

hat. Da die Zeit positiv ist, passt die 2. Lösung nicht.

Antwort: der Wichtel braucht allein 15 Minuten, um ein Geschenk zu verpacken. Sein Freund braucht 15 Minuten mehr, daher 30 Minuten für ein Geschenk. Gemeinsam wären beide nach 10 Minuten fertig.

7. Dezember 2017

Luisa Handel

Familie im Café

Susi ist mit ihren Eltern, ihrem Bruder und ihrem gemeinsamen Hund auf dem Weihnachtsmarkt. Leider ist es sehr kalt, so dass sich einer nach dem anderen in ein Café gehen. Ihr Vater geht nicht als erster. Ihre Mutter bleibt weder am kürzesten noch am längsten draußen. Susi geht kurz nach ihrem Vater. Ihr Bruder geht nicht als Zweiter und der Hund geht erst, nachdem nach ihrem Bruder noch jemand ins Café gegangen ist. In welcher Reihenfolge begibt sich die Familie ins Café?

Lösung:

Person	Verlässt als 1.	Als 2.	Als 3.	Als 4.	Als 5.
Vater	Nicht als 1.	-	-	->Vater muss wegen Susi als 4. gehen	->nicht als 5. Wegen Susi
Mutter	Nicht als 1.	2. bleibt am Ende übrig	-		Nicht als 5.
Susi (geht nach Vater)	->nicht 1.	->nicht 2.	-	-	Bleibt übrig (muss als 5. gehen)
Bruder	Bleibt als einziger übrig (geht als 1.)	Nicht 2.	-	-	-
Hund (geht nach Bruder und weiterer Person)	->nicht 1.	->nicht 2.	Muss wegen Bruder als 3. gehen	-	-





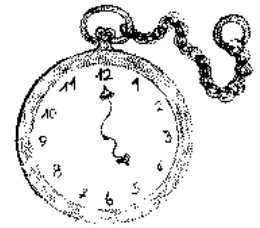
Antwort: Der Bruder geht zuerst, danach die Mutter, nach der Mutter der Hund, nach dem Hund der Vater und nach dem Vater Susi.

8. Dezember 2017

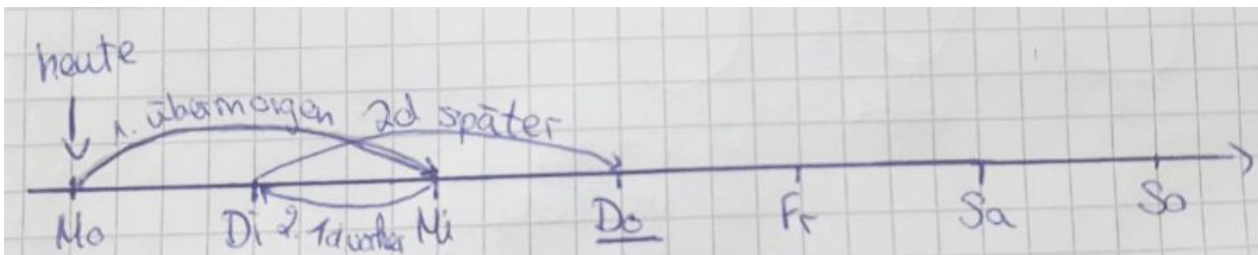
Rätzel eines Uhrmachers

Luisa Handel

Der Weihnachtsmann muss seine Uhr reparieren lassen, damit er pünktlich alle Geschenke abliefern kann. Er bringt sie zu einem alten Uhrmacher, der ihm von Rudolph empfohlen wurde. Er hat ihn aber auch gewarnt, dass der Uhrmacher Unpünktlichkeit hasst, so sehr, dass er Uhren, die zu früh oder zu spät abgeholt werden, wegwirft. Als der Weihnachtsmann ihm die Uhr am Montag brachte, sagte der Uhrmacher: "Komm bitte zwei Tage nach dem Tag vor übermorgen wieder, dann ist die Uhr wieder in Ordnung." Wann muss der Weihnachtsmann seine Uhr wieder abholen?



Lösung: Der Mittwoch ist „übermorgen“, ein Tag davor ist Dienstag, zwei Tage danach ist Donnerstag.



Antwort: die Uhr muss am Donnerstag abgeholt werden.

9. Dezember 2017

Luisa Handel

Rentiere auf den Wiesen

Eine Herde Rentiere lief über einige Wiesen. Auf jeder Wiese blieb die Hälfte der Rentiere und noch ein Halb des Rentiers. Nach der siebten Wiese war der gesamte Herd verteilt. Wie viele Rentiere waren am Anfang in der Herde?

Lösung:

Nach der 7. Wiese ist kein Rentier weitergelaufen, was bedeutet, dass ein Halb des Tieres auch die Hälfte der zu 7. Wiese angekommenen Herde ist. Also, ein Rentier ist zur Wiese gekommen.

Jetzt kann zurückgerechnet werden.

Zur 6. Wiese sind $2 \cdot (1 + 0,5) = 3$ Rentiere gekommen.

Zur 5. Wiese sind $2 \cdot (3 + 0,5) = 7$ Rentiere gekommen.

Zur 4. Wiese sind $2 \cdot (7 + 0,5) = 15$ Rentiere gekommen.

...
 $2^{8-n} - 1$ Rentiere sind zur Wiese mit der Nummer n gekommen.



der
7.



Antwort: Am Anfang an der 1. Wiese gab es die Herde mit 127 Rentiere.

Zusatzaufgabe: Wie viele Rentiere wären am Anfang in der Herde, wenn die Herde sich auf 100 Wiesen verteilt hat?

10. Dezember 2017

Luisa Handel

Farbige Rentiere

Der Weihnachtsmann hat einige Rentiere drei verschiedenen Farben. Auf die Frage wie viele Rentiere hat er insgesamt, antwortete er jedoch immer: „Alle von ihnen sind schwarz bis auf zwei und es sind alle braun bis auf zwei und es sind alle weiß bis auf zwei“. Wie viele Rentiere hat er denn nun?



Lösung:

Wenn der Weihnachtsmann alle bis auf zwei schwarze Rentiere hat, dann sind zwei Rentiere einer anderen Farbe, als schwarz. Da es zwei weitere Farben gibt und er von jeder Farbe mindestens eines haben muss, gibt es ein braunes Rentier und ein weißes Rentier. Analog gibt es ein schwarzes Rentier und ein weißes Rentier.

Antwort: Der Weihnachtsmann hat 3 Rentiere.

11. Dezember 2017

Luisa Handel

Der Weihnachtsmann schenkt Siebtklässlerin elf Kekse und sagt zu ihr: "Es ist sehr wichtig, dass Du sie nicht alle auf einmal isst. Warte mindestens sieben Minuten, bis Du einen weiteren Keks isst, sonst ist es nicht gesund!" Die Siebtklässlerin braucht 30 Sekunden, um einen Keks gegessen zu haben. Nach wieviel Minuten darf diese Siebtklässlerin frühestens alle Kekse gegessen haben?



Lösung:

Den ersten Keks isst die Siebtklässlerin sofort, um schnellst möglich alle gegessen zu haben. Für jeden weiteren muss sie (zehn Mal) sieben Minuten warten. Also beträgt die Gesamtwarezeit 70 Minuten. 11 Kekse werden in 5,5 Minuten gegessen.

Antwort: nach 75,5 Minuten gibt es keine vom Weihnachtsmann an diese Siebtklässlerin geschenkten Kekse mehr.



12. Dezember 2017

Juliette Scheuing

Der Weihnachtsmann unterhält sich mit dem Christkind:

Weihnachtsmann: -Ich habe drei Wichtel.

Christkind: -Wie alt sind sie?

Weihnachtsmann: -Das Produkt deren Alter ist 36 und die Summe deren Alter ist gleich der Anzahl der Geschenke auf dem Tisch.

Christkind: -Ich weiß aber immer noch nicht, wie alt die Wichtel sind.

Weihnachtsmann: -Der älteste Wichtel kann schon Geschenke verpacken.

Christkind: -Ok, jetzt kann ich sagen, wie alt die Wichtel sind.



Lösung:

Christkind weiß, wie viele Geschenke auf dem Tisch liegen, trotzdem weiß immer noch nicht, wie alt die Wichtel sind. Das bedeutet, dass es solche zwei Zerlegungen der Zahl 36 in drei Faktoren gibt, dass die Summen der Faktoren in beiden Zerlegungen gleich sind.

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \cdot 1$$

Der älteste Wichtel gibt es bei der 1. Zerlegung.

Antwort: Der älteste Wichtel ist 9 Jahre alt, die beiden Zwillinge sind zwei Jahre alt.

13. Dezember 2017

Weihnachtsmann

Väterchen Frost und Snegurohka

Väterchen Frost fragte Snegurochka, ob sie die Zahl 2018 als Summe von zwei Primzahlen darstellen kann. Snegurochka sagte: „Ja, natürlich! Nach der Goldbachsche Vermutung kann jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, als Summe zweier Primzahlen dargestellt werden.“ Und hat nach ein bisschen Überlegung die beiden Primzahlen dem Väterchen Frost genannt.

Gebe die Darstellung der Zahl 2018 als Summe zweier Primzahlen dar.

Lösung:



Snegurochka sagte dem Väterchen Frost, dass 2011 und 7 zwei Primzahlen sind, deren Summe 2018 ist.

Väterchen Frost fragte, wie er feststellen kann, ob 2011 eine Primzahl ist. Dass 7 eine Primzahl ist, ist ihm seit mehreren Jahren bekannt.



Snegurochka antwortete, dass es Folgendes gilt.

43 ist die größte Primzahl, deren Quadrat noch kleiner als 2011 ist.

2011 ist eine Primzahl, wenn 2011 durch keine Primzahl von 2 bis 43 teilbar ist. Ob 2011 durch keine Primzahl von 2 bis 43 teilbar ist, kann Väterchen Frost ausprobieren.

Antwort: $2018 = 2011 + 7$

Zusatzfrage: gibt es andere Darstellungen der Zahl 2018 als Summe zweier Primzahlen?